BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2013***

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ОПИСЫВАЮЩЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Я.Т.МЕГРАЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет
yashar_aze @ mail.ru

В работе исследована одна обратная задача для одного уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче (в определенном смысле), для которой доказывается теорема о существовании и единственности. Далее пользуясь этими фактами доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнения третьего порядка, классическое решение.

Обратные задачи представляют собой активно развивающийся раздел современной математики. В последнее время обратные задачи нашли очень широкое применение в различных областях науки.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь, прежде всего работы А.Н.Тихонова [1], М.М.Лаврентьева [2,3], А.М.Денисова [4] , M.I.Ivanchov [5] и их учеников.

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решений обратной краевой задачи для одного уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде.

Постановка задачи и сведение её к эквивалентной задаче.

Рассмотрим уравнение [6]

$$u_{ttt}(x,t)-u_{txx}(x,t)+u_{tt}(x,t)-\alpha u_{xx}(x,t)=a_0(t)u(x,t)+a_1(t)u_t(x,t)+f(x,t) \qquad (1)$$

в области $D_T=\{(x,t): 0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$, обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\quad u_t(x,0)=\varphi_1(x),\ u_{tt}(x,0)=\varphi_2(x)\quad (0\le x\le 1), \tag{2}$$

граничными условиями

$$u(0,t)=0,\ u_x(1,t)=0 \qquad (0\le t\le T) \tag{3}$$

и дополнительными условиями

$$U_i(u)\equiv u(x_i,t)+\int_0^1 K_i(x)u(x,t)dx=h_i(t)\ \ (i=1,2,\quad x_1\ne x_2,\ 0\le t\le T), \tag{4}$$

где α - заданное число , $f(x,t),\ \varphi_i(x)\ (i=0,1,2)$, $K_i(x),\ h_i(t)$ $(i=1,2)$ - заданные функции, а $u(x,t)$ и $a_0(t)$ и $a_1(t)$ -искомые функции.

Определение. Классическим решением задачи (1)-(4) назовём тройку $\{u(x,t),a_0(t),a_1(t)\}$ функций $u(x,t),a_0(t)$ и $a_1(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);

2) функции $a_0(t),\ a_1(t)$ непрерывны на $[0,T]$;

3) все условия (1)-(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма1. Пусть $f(x,t)\in C(D_T),\ \varphi_i(x)\in C[0,1]\ (i=0,1,2),\ K_i(x)\in L_2(0,1)$ $h_i(t)\in C^3[0,T]$, $(i=1,2)$, $h(t)\equiv h_1(t)h_2'(t)-h_2(t)h_1'(t)\ne 0$ $(0\le t\le T)$ и выполняются условия согласования:

$$U_i(\varphi_0)\equiv\varphi_0(x_i)+\int_0^1 K_i(x)\varphi_0(x)dx=h_i(0)\quad (i=1,2),$$

$$U_i(\varphi_1)\equiv\varphi_1(x_i)+\int_0^1 K_i(x)\varphi_1(x)dx=h_i'(0)\ \ (i=1,2),$$

$$U_i(\varphi_2)\equiv\varphi_2(x_i)+\int_0^1 K_i(x)\varphi_2(x)dx=h_i''(0)\quad (i=1,2)\,. \tag{5}$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$ и $a_0(t),\ a_1(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)-(3), из соотношений (1)-(3) и

$$a_0(t)h_i(t)+a_1(t)h_i'(t)+U_i(f)=h_i'''(t)+h_i''(t)-U_i(u_{txx})-\alpha U_i(u_{xx}\ \ )\ \ (0\le t\le T;i=1,2). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a_0(t),a_1(t)\}$ является решением задачи (1)-(4). Считая $h_i(t)\in C^3[0,T]$ и дифференцируя три раза (4), имеем:

$$U_i(u_t)\equiv u_t(x_i,t)=\int_0^1 K_i(x)u_t(x,t)dx=h_i'(t)\ \ (0\le t\le T;i=1,2),$$

$$U_i(u_{tt}) \equiv u_{tt}(x_i,t) = \int_0^1 K_i(x)u_{tt}(x,t)dx = h_i''(t) \ \ (0 \le t \le T; i=1,2),$$

$$U_i(u_{ttt}) \equiv u_{ttt}(x_i,t) = \int_0^1 K_i(x)u_{ttt}(x,t)dx = h_i'''(t) \ \ (0 \le t \le T; i=1,2). \qquad (7)$$

Из уравнения (1) имеем:

$$U_i(u_{ttt}) - U_i(u_{txx}) + U_i(u_{tt}) - \alpha U_i(u_{xx}) = a_0(t)U_i(u) + a_1(t)U_i(u) + U_i(f) \ (0 \le t \le T; i=1,2). \quad (8)$$

Отсюда, с учётом (4) и (7), приходим к выполнению (6).

Теперь, предположим, что {u(x,t), a_0(t), a_1(t)} является решением задачи (1)- (3), (6). Тогда из (6) и (8), получаем:

$$\frac{d^3}{dt^3}(U_i(u) - h(t)) + \frac{d^2}{dt^2}(U_i(u) - h(t)) -$$

$$- a_1(t)\frac{d}{dt}(U_i(u) - h_i(t)) - a_0(t)(U_i(u) - h_i(t)) = 0 \ \ (0 \le t \le T; i=1,2). \quad (9)$$

В силу (2) и условий согласования (5), имеем:

$$U_i(u)(0) - h_i(0) = U_i(\varphi_0) - h_i(0) = 0, \ \ U_i(u_t)(0) - h'_i(0) = U_i(\varphi_1) - h'_i(0) = 0,$$

$$U_i(u_{tt})(0) - h''_i(0) = U_i(\varphi_2) - h''_i(0) = 0 \quad (i=0,1). \qquad (10)$$

Из (9) и (10) заключаем, что выполняется условие (4). Лемма доказана.

Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи.

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a_0(t), a_1(t)\}$ задачи (1)-(3), (6) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x, \ \ \lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1), \qquad (11)$$

где

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,...).$$

Тогда, применяя формальную схему Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$u_k'''(t) + u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k'(t) + \alpha\lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t; u, a_0, a_1) \quad (k=1,2,...; \ 0 \le t \le T), \quad (12)$$

$$u_k(0) = \varphi_{0k}, \ u_k'(0) = \varphi_{1k}, \ u_k''(0) = \varphi_{2k} \quad (k=1,2,...), \qquad (13)$$

где

$$F_k(t; u, a_0, a_1) = f_k(t) + a_0(t)u_k(t) + a_1(t)u_k'(t), \ f_k(t) = 2\int_0^1 f(x,t) \sin \lambda_k x dx,$$

$$\varphi_{ik} = 2\int_0^1 \varphi_i(x) \sin \lambda_k x dx \qquad (i=0,1,2; \ k=1,2,...).$$

Решая задачу (12), (13), находим:

$$u_k(t)=\frac{1}{b_k}\Big\{\Big[\big(\gamma_k^2+\beta_k^2\big)e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\big[\alpha_k\big(\alpha_k-2\gamma_k\big)\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\big(\gamma_k^3+\alpha_k\gamma_k^2-\alpha_k\beta_k^2-\alpha_k^2\gamma_k\big)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{0k}+$$

$$+\left[-2\gamma_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[2\gamma_k\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\big(\alpha_k^2+\beta_k^2-\gamma_k^2\big)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{1k}+$$

$$+\left[e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[-\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}(\gamma_k-\alpha_k)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{2k}++\int_0^t F_k(\tau;u,a_0,a_1)\big[e^{\alpha_k(t-\tau)}+$$

$$+e^{\gamma_k(t-\tau)}\left[\frac{\gamma_k-\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k(t-\tau)-\cos\beta_k(t-\tau)\right]\Big]d\tau\Big\}\ (k=1,2,...),\qquad(14)$$

где

$$\alpha_k=\alpha_{1k}+\beta_{1k}-\frac{1}{3},\ \beta_k=\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_{1k}-\beta_{1k}),\ \gamma_k=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(\alpha_{1k}+\beta_{1k}),$$

$$b_k=\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2-2\alpha_k\gamma_k,$$

$$\alpha_{1k}=\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right)+\left[\frac{1}{4}\left(\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right)^2+\frac{1}{27}\left(\lambda_k^2-\frac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}},$$

$$\beta_{1k}=\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right)-\left[\frac{1}{4}\left(\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right)^2+\frac{1}{27}\left(\lambda_k^2-\frac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

После подстановки выражения $u_k(t)$ $(k=1,2,...)$ в (11), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)-(3), (6) получаем:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{b_k}\Big\{\Big[\big(\gamma_k^2+\beta_k^2\big)e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\big[\alpha_k\big(\alpha_k-2\gamma_k\big)\cos\beta_k t+\right.$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\big(\gamma_k^3+\alpha_k\gamma_k^2-\alpha_k\beta_k^2-\alpha_k^2\gamma_k\big)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{0k}+$$

$$+\left[-2\gamma_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[2\gamma_k\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\big(\alpha_k^2+\beta_k^2-\gamma_k^2\big)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{1k}+$$

$$+\left[e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[-\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}(\gamma_k-\alpha_k)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{2k}+$$

$$+\int_0^t F_k(\tau;u,a_0,a_1)\left[e^{\alpha_k(t-\tau)}+e^{\gamma_k(t-\tau)}\left[\frac{\gamma_k-\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k(t-\tau)-\cos\beta_k(t-\tau)\right]\right]d\tau\Bigg\}\Bigg\}\sin\lambda_k x. \quad (15)$$

Дифференцируя (14), находим:

$$u_k'(t)=\frac{1}{b_k}\Big\{\Big[\alpha_k\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\Big[-\alpha_k\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{\alpha_k}{\beta_k}\left(\gamma_k-\alpha_{kk}\right)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{0k}+$$

$$+\left[-2\alpha_k\gamma_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[\left(\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2\right)\cos\beta_k t+\frac{\gamma_k}{\beta_k}\left(\alpha_k^2-\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{1k}+$$

$$+\left[\alpha_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\left[-\alpha_k\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\left(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\sin\beta_k t\right]\right]\varphi_{2k}+$$

$$\int_0^t F_k(\tau;u,a_0,a_1)\Big[\alpha_k e^{\alpha_k(t-\tau)}+$$

$$+e^{\gamma_k(t-\tau)}\left[\left(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\left(\gamma_k-\alpha_k\right)+\beta_k\right)\sin\beta_k(t-\tau)-\alpha_k\cos\beta_k(t-\tau)\right]\Big]d\tau\Big\}(k=1,2,...). \quad (16)$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй и третьей компоненты $a_0(t)$, $a_1(t)$ решения $\{u(x,t),a_0(t),a_1(t)\}$ задачи (1)-(3), (6), подставим выражение (11) в (6):

$$a_0(t)=h^{-1}(t)\{(h_1'''(t)+h_1''(t)-U_1(f))h_2'(t)-(h_2'''(t)+h_2''(t)-$$

$$-U_2(f))h_1'(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\vartheta_k(t)(p_{1k}h_2'(t)-p_{2k}h_1'(t))\}\quad, \qquad (17)$$

$$a_1(t)=h^{-1}(t)\{(h_2'''(t)+h_2''(t)-U_2(f))h_1(t)-(h_1'''(t)+h_1''(t)-$$

$$-U_1(f))h_2(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\vartheta_k(t)(p_{2k}h_1(t)-p_{1k}h_2(t))\}, \qquad (18)$$

где

$$h_1(t)h_2'(t)-h_2(t)h_1'(t)\neq 0,$$

$$\vartheta_k(t)\equiv u_k'(t)+\alpha u_k(t)=$$

$$\frac{1}{b_k}\Big\{\Big[(\alpha+\alpha_k)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\Big[\alpha_k\left(\alpha\alpha_k-2\alpha\gamma_k-\gamma_k^2-\beta_k^2\right)\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{\alpha_k}{\beta_k}\left(\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)+\alpha\left(\gamma_k^2-\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\right)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{0k}+$$

$$+\Big[-2(\alpha+\alpha_k)\gamma_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\Big[(2\alpha\gamma_k+\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2)\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2-\gamma_k^2\right)+\gamma_k\left(\alpha_k^2-\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\right)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{1k}+\Big[(\alpha+\alpha_k)e^{\alpha_k t}+$$

$$+e^{\gamma_k t}\left[-(\alpha+\alpha_k)\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha\gamma_k-\alpha\alpha_k+\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\sin\beta_k t\right]\Big]\varphi_{2k}+$$

$$+\int_0^t F_k(\tau;u,a_0,a_1)\Big[(\alpha+\alpha_k)e^{\alpha_k(t-\tau)}+e^{\gamma_k(t-\tau)}\Big[(-\alpha+\alpha_k)\cos\beta_k(t-\tau)+$$

$$+\left(\frac{\gamma_k+\alpha}{\beta_k}(\gamma_k-\alpha_k)+\beta_k\right)\sin\beta_k(t-\tau)\Big]\Big]d\tau\Big\}(k=1,2,\ldots),$$

$$p_{ik}=U_i(\sin\lambda_k x)=\sin\lambda_k x_i+\int_0^1 K_i(x)\sin\lambda_k x dx\quad(i=1,2)\,.$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (5) сведено к решению системы (15), (17) (18) относительно неизвестных функций $u(x,t)$, $a_0(t)$ и $a_1(t)$.

Аналогично [7] можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. Если $\{u(x,t),a_0(t),a_1(t)\}$ - любое классическое решение задачи (1)-(3),(6), то функции

$$u_k(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx\quad(k=1,2,\ldots)$$

удовлетворяют системе (14).

Замечание. Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1)- (3), (6) достаточно доказать единственность решения системы (14), (17), (18).

Теперь, с целью исследования задачи (1)-(3), (6) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^{\alpha,\beta}$[8] совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x_i t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\lambda_k x,\ \ \lambda_k=\frac{\pi}{2}(2k-1)\,,$$

рассматриваемых на D_T , для которых все функции $u_k(t)\in C^1[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{\alpha}\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{\beta}\|u_k'(t)\|_{C[0,T]})^2\Big)^{\frac{1}{2}}<+\infty\quad,$$

где $\alpha\ge 0$, $\beta\ge 0$ целое число.

Норма на этом множестве определяется так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\alpha,\beta}}=J_T(u)\,.$$

2.Через $E_T^{\alpha,\beta}$ обозначим пространства вектор функции $\{u(x,t), a_0(t), a_1(t)\}$, такие что

$$u(x,t) \in B_{2,T}^{\alpha,\beta}, \quad a_i(t) \in C[0,T] \quad (i = 0;1).$$

Снабдим это пространство нормой:

$$\|z\|_{E_T^{\alpha,\beta}} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\alpha,\beta}} + \|a_0(t)\|_{C[0,T]} + \|a_1(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^{\alpha,\beta}$ и $E_T^{\alpha,\beta}$ являются банаховыми пространствами.

Рассмотрим в пространстве $E_T^{3,3}$ оператор

$$\Phi(u,a) = \{\Phi_1(u,a), \Phi_2(u,a), \Phi_3(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a) = \tilde{u}(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \sin \lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u,a) = \tilde{a}_0(t), \; \Phi_3(u,a) = \tilde{a}_1(t),$$

где $\tilde{u}_k(t)$ ($k = 1,2,...$), $\tilde{a}_0(t)$ и $\tilde{a}_1(t)$ равны соответственно правым частям (14), (17) и (18).

Примем обозначения

$$\alpha_{2k} = -\frac{1}{2}\left(\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \frac{2}{27}\right) + \left[\frac{1}{4}\left(\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \frac{2}{27}\right)^2 + \frac{1}{27}\left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

$$\beta_{2k} = \frac{1}{2}\left(\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \frac{2}{27}\right) + \left[\frac{1}{4}\left(\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\lambda_k^2 + \frac{2}{27}\right)^2 + \frac{1}{27}\left(\lambda_k^2 - \frac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Тогда

$$\alpha_{1k} = \sqrt[3]{\alpha_{2k}}, \; \beta_{1k} = -\sqrt[3]{\beta_{2k}}.$$

Отсюда, с учетом (19) и (20), получаем:

$$\alpha_{1k} + \beta_{1k} = \left|\sqrt[3]{\alpha_{2k}} - \sqrt[3]{\beta_{2k}}\right| = \left|\frac{\alpha_{2k} - \beta_{2k}}{\sqrt[3]{\alpha_{2k}^2} + \sqrt[3]{\alpha_{2k}\beta_{2k}} + \sqrt[3]{\beta_{2k}^2}}\right| \le \frac{9\alpha}{2} + \frac{11}{2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$|\alpha_k| \le \left|\alpha_{1k} + \beta_{1k} - \frac{1}{3}\right| \le \frac{9\alpha}{2} + \frac{13}{6} \equiv \varepsilon_1, \; |\gamma_k| = \left|-\frac{1}{3} - \frac{\alpha_{1k} + \beta_{1k}}{2}\right| \le \frac{9\alpha}{4} + \frac{5}{4} \equiv \varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_3\lambda_k \equiv \frac{\sqrt{2}}{3}\lambda_k \le \beta_k \le \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{27}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\alpha - \frac{1}{27}\right)^2 + \frac{1}{27}}}\;{}_k\lambda_k \equiv \varepsilon_4\lambda_k,$$

$$b_k = (\alpha_k - \gamma_k)^2 + \beta_k^2 \ge \beta_k^2 \ge \varepsilon_3^2\lambda_k^2, \; |p_{ik}| = 1 + \int_0^1 |K_i(x)| dx \equiv p_i \quad (i = 1,2).$$

Учитывая эти соотношения, находим:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \rho_0(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_{0k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_{1k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\rho_2(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|\varphi_{2k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_2(T)\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\rho_2(T)T\|a_0(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_2(T)T\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k'(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|\tilde{u}_k'(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \rho_3(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_{0k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_4(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_{1k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\rho_5(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|\varphi_{2k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_5(T)\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\rho_5(T)T\|a_0(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_5(T)T\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k'(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|\vartheta_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \rho_6(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_{0k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_7(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_{1k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\rho_8(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|\varphi_{2k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_8(T)\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2|f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\rho_8(T)T\|a_0(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_8(T)T\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k'(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

где

$$\rho_0(T) = \frac{\sqrt{6}}{\varepsilon_3^2}\left\{(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2)e^{\varepsilon_1 T} + \varepsilon_1 e^{\varepsilon_2 T}\left[\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3}(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_3)\right]\right\},$$

$$\rho_1(T) = \frac{\sqrt{6}}{\varepsilon_3^2}\left\{2\varepsilon_2 e^{\varepsilon_1 T} +_1 e^{\varepsilon_2 T}\left[2\varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_3}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2)\right]\right\},$$

$$\rho_2(T) = \frac{\sqrt{6}}{\varepsilon_3^2}\left\{e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T}\left[1 + \frac{1}{\varepsilon_3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]\right\},$$

$$\rho_3(T) = \frac{\sqrt{6}\,\varepsilon_1(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2)}{\varepsilon_3^2}\left\{e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T}\left[1 + \frac{1}{\varepsilon_3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]\right\},$$

$$\rho_4(T) = \frac{\sqrt{6}}{\varepsilon_3^2}\left\{2\varepsilon_1\varepsilon_2 e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2)\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)\right\},$$

$$\rho_5(T) = \frac{\sqrt{6}}{\varepsilon_3^2}\left\{\varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 T} + e^{\varepsilon_2 T}\left[\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_3}(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_3)\right]\right\},$$

$$\rho_6(T)=\frac{1}{\varepsilon_3^2}\{(\alpha+\varepsilon_1)(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2)e^{\varepsilon_1 T}+e^{\varepsilon_2 T}\left[\varepsilon_1(\alpha\varepsilon_1+2\alpha\varepsilon_2+\right.$$

$$\left.\left.\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\left((\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2)+\alpha(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_3)\right)\right)\right]\Bigg\},$$

$$\rho_7(T)=\frac{1}{\varepsilon_3^2}\{2\varepsilon_2(\alpha+\varepsilon_1)e^{\varepsilon_1 T}+e^{\varepsilon_2 T}\left[\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\right.$$

$$\left.+2\alpha\varepsilon_2+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2)+\alpha(\varepsilon_1^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_3)\right)\right]\Bigg\} ,$$

$$\rho_8(T)=\frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{(\alpha+\varepsilon_1)e^{\varepsilon_1 T}+e^{\varepsilon_2 T}\left[\alpha+\varepsilon_1+\frac{1}{\varepsilon_3}(\alpha\varepsilon_2+\alpha\varepsilon_1+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_2)\right]\right\}.$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3),(6) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi_i(x)\in C^2[0,1],\ \varphi_i'''(x)\in L_2(0,1)$ и $\varphi_i(0)=\varphi_i'(1)=\varphi_i''(0)=0\,(i=0,1).$
2. $\varphi_2(x)\in C^1[0,1],\ \varphi_2''(x)\in L_2(0,1)$ и $\varphi_2(0)=\varphi_2'(1)=0$.
3. $f(x,t),\ f_x(x,t)\in C(D_T),\ f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T)$ и
   $f(0,t)=f_x(1,t)=0\ \ (0\le t\le T)$.
4. $K_i(x)\in L_1(0,1), h_i(t)\in C^3[0,T]\ (i=1,2),\ h(t)\equiv h_1(t)h_2'(t)-h_2(t)h_1'(t)\neq 0$ $(0\le t\le T)$.

Тогда из (21) и (22), соответственно, имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\le A_1(T)+B_1(T)\left(\|a(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\right)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,3}}\ , \quad (24)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|\tilde{u}_k'(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\le A_2(T)+B_2(T)\left(\|a(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\right)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,3}}\ , \quad (25)$$

где

$$A_1(T)=\rho_0(T)\|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_1(T)\|\varphi_1'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_2(T)\|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_2(T)\sqrt{T}\,\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$A_2(T)=\rho_3(T)\|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_4(T)\|\varphi_1'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_5(T)\|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_5(T)\sqrt{T}\,\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T)=\rho_2(T)T\ ,\ \ B_2(T)=\rho_5(T)T.$$

Далее, из (17) и (18) с учетом (23), соответственно, находим:

$$\|\tilde{a}_0(t)\|_{C[0,T]}\le A_3(T)+B_3(T)\left(\|a(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\right)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,3}}\ , \quad (26)$$

$$\|\tilde{a}_1(t)\|_{C[0,T]}\le A_4(T)+B_4(T)\left(\|a(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\right)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,3}}\ , \quad (27)$$

где

$$A_{3}(T)=\left\|\left[h(t)\right]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\Big\{\left\|(h_1'''(t)+h''(t)-U_1(f))h_2'(t)-(h_2'''(t)+h_2''(t)-U_2(f))h_1'(t))\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|p_1h_2'(t)-p_2h_1'(t)\right\|_{C[0,T]}\Big(\rho_6(T)\left\|\varphi_0'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\rho_7(T)\left\|\varphi_1'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\rho_8(T)\left\|\varphi_2''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\rho_8(T)\sqrt{T}\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\Big)\Big\},$$

$$A_{4}(T)=\left\|\left[h(t)\right]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\Big\{\left\|(h_2'''(t)+h_2''(t)-U_2(f))h_1(t)-(h_1'''(t)+h_1''(t)-U_1(f))h_2(t)\right\|_{C[0,T]}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|p_2h_1(t)-p_1h_2(t)\right\|_{C[0,T]}\Big(\rho_6(T)\left\|\varphi_0'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\rho_7(T)\left\|\varphi_1'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\rho_8(T)\left\|\varphi_2''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\rho_8(T)\sqrt{T}\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\Big)\Big\},$$

$$B_3(T)=\left\|\left[h(t)\right]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|p_1h_2'(t)-p_2h_1'(t)\right\|_{C[0,T]}\,{}_4T,$$

$$B_2(T)=\left\|\left[h(t)\right]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|p_2h_1(t)-p_1h_2(t)\right\|_{C[0,T]}\,{}_4T.$$

Из неравенств (24)-(27) заключаем:

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{3,3}}+\left\|\tilde{a}_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|\tilde{a}_1(t)\right\|_{C[0,T]}\le$$
$$\le A(T)+B(T)\left(\left\|a_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|a_1(t)\right\|_{C[0,T]}\right)\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{3,3}}, \qquad (28)$$

где

$$A(T)=\sum_{i-1}^{4}A_i(T),\qquad B(T)=\sum_{i-1}^{4}B_i(T).$$

Итак, доказана следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1-4 и

$$B(T)(A(T)+2)^2<1. \qquad (29)$$

Тогда задача (1)-(3), (6) имеет в шаре $K=K_R\left(\|z\|_{E_T^{3,3}}\le R=A(T)+2\right)$ из $E_T^{3,3}$ единственное решение.

Доказательство. В пространстве $E_T^{3,3}$ рассмотрим уравнение

$$z=\Phi z, \qquad (30)$$

где $z=\{u,a_0,a_1\}$, компоненты $\Phi_i(u,a_0,a_1)(i=1,2,3)$ оператора $\Phi(u,a_0,a_1)$ определены правыми частями уравнений (15), (17),(18), соответственно.

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a_0,a_1)$ в шаре $K=K_R$ из $E_T^{3,3}$. Аналогично (28) получаем, что для любых $z=\{u,a_0,a_1\},z_1=\{u_1,a_{01},a_{11}\},z_2=\{u_2,a_{02},a_{12}\}\in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^{3,3}}\le A(T)+B(T)\left(\|a_0(t)\|_{C[0,T]}+\|a_1(t)\|_{C[0,T]}\right)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,3}}, \qquad (31)$$

$$\|\Phi z_1-\Phi z_2\|_{E_T^{3,3}}\le B(T)R\left(\|a_{01}(t)-a_{02}(t)\|_{C[0,T]}+\|a_{11}(t)-a_{12}(t)\|_{C[0,T]}+\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,3}}\right). \qquad (32)$$

Тогда, с учетом (29), из оценок (31), (32) следует, что оператор Φ действует в шаре $K=K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K=K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a_0, a_1\}$, которая является решением уравнения (30), т.е. является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (15),(17),(18) .

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^{3,3}_{2,T}$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$,$u_t(x,t)$,$u_{txx}(x,t)$ в D_T.

Легко проверить, что $u_{tt}(x,t)$, $u_{ttt}(x,t)$ непрерывны в D_T и уравнение (1) , условия (2), (3) и (6) удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x,t), a_0(t), a_1(t)\}$ является решением задачи (1)-(3),(5). В силу следствия леммы 2, оно единственно в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью леммы 1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1)-(4).

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и условия согласования (5).

Тогда задача (1)-(4) имеет в шаре $K = K_R\left(\|z\|_{E^3_T} \le R = A(T) + 2\right)$ из E^5_T единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.И. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943, 39, №5, с. 195-198.
2. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964, 157, №3, с. 520-521.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М: Наука, 1920
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М: МГУ, 1954
5. Ivanchov M. I., Inverse Problems for Equation of Parabolic Type.// Ukraine.2003, p.240.
6. Варламов В.В. О фундаментальном решении одного уравнения третьего порядка , описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде. // ЖВМ и МФ. 1988, 28, №4, с. 629-633.
7. Мегралиев Я.Т. Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска - Лява с дополнительным интегральным условием. // СИЖ
8. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыоглы, 2010, 168 с.

ДИСПЕРСИЙАЛЫ МЦЩИТЛЯРДЯ УЗУНУНА ДАЛЬАЛАРЫ ХАРАКТЕРИЗЯ ЕДЯН ЦЧТЯРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТЯНЛИК ЦЧЦН ТЯРС СЯРЩЯД МЯСЯЛЯСИ

Й.Т.МЕЩРЯЛИЙЕВ

ХЦЛАСЯ

Ищдя дисперсийалы мцщитлярдя узунуна дальалары характеризя едян цчтяртибли диференсиал тянлик цчцн тярс сярщяд мясяляси тядгиг едилир. Бунун цчцн явввялъя гойулмуш мясяля еквивалент мясяляйя этирилир вя бу мясялянин щяллинин вар-

лыг вя йеэанялийи исбат едилир. Сонра ися еквивалентликдян истифадя едяряк илк гойулмуш мясялянин щяллинин варлыг вя йеэанялийи исбат едилир.

Açar sözlər: tərs məsələ, üçtərtibli məsələ,klasssik məsələ.

INVERSE BOUNDARY PROBLEM OF AN EQUATION ON THE THIRD ORDER DESCRIBING THE PROPAGATION OF LONGITUDINAL WAVES IN A DISPERSIVE MEDIUM

Ya.T.MEHRALIYEV

SUMMARY

The paper studies an inverse problem for a third order equation describing the propagation of longitudinal waves in a dispersive medium.

For this reason, first, the initial problem reduces to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness proves. Then, using these facts, the existence and uniqueness of the classical solution of the initial problem are proved.

Key words: inverse problem, equation on third order, classic solution.

Поступила в редакцию: 20.05.2013 г.
Подписано к печати: 24.05.2013 г.